

$$[J_i, J_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} J_k$$

$$J^2 |\delta, j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |\delta, j, m\rangle$$

$$J_z |\delta, j, m\rangle = \hbar m |\delta, j, m\rangle$$

$$-j \leq m \leq j$$

$\therefore 2j$ es entero positivo

$j = 0, 1, 2, \dots$ Bosones

$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ Fermiones

Standard Model of Elementary Particles					
three generations of matter (fermions)			interactions / force carriers (bosons)		
	I	II	III		
mass	$\approx 2.16 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.273 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 172.57 \text{ GeV}/c^2$	0	$\approx 125.2 \text{ GeV}/c^2$
charge	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
QUARKS	u up	c charm	t top	g gluon	H higgs
	d down	s strange	b bottom	γ photon	
	e electron	μ muon	τ tau	Z Z boson	
LEPTONS	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	W W boson	

Para j dado, los valores posibles de m son

$$m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

$$j=2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$j=1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$j=0 \quad \cdot$$

$$m_j = -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$$

$$j=\frac{3}{2} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$j=\frac{3}{2} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$j=\frac{1}{2} \quad \cdot \quad \cdot$$

Si j es entero, m es entero.

Si j es semi-entero m es semi-entero

Partiendo de un e.V. de J^2 y J_z $|k, j, m\rangle$ podemos obtener más e.Vs usando J_+ , J_- .

• Los e.V. correspondientes a distinto e.v. son ortogonales. (para ops Hermitianos)

$$\therefore \langle k, j', m' | k, j, m \rangle = \delta_{j'j} \delta_{m'm}$$

(Siempre podemos escoger el e.V. normalizado).

• Ya sabemos que $J_{\pm} |k, j, m\rangle$ es e.V. de J^2 y J_z con evs $\hbar^2 j(j+1)$ y $\hbar(m \pm 1)$.

Sin embargo nos gustaría tener una expresión

$$J_{\pm} |k, j, m\rangle = C |k, j, m \pm 1\rangle$$

- Calculamos la norma de $J_{\pm} |k, j, m\rangle$

$$\langle k, j, m | J_{\mp} J_{\pm} | k, j, m \rangle = \langle k, j, m | J^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z | k, j, m \rangle$$

$$= \langle k, j, m | k, j, m \rangle (\hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 \mp \hbar m)$$

$$= \hbar^2 (j(j+1) - m(m \pm 1))$$

$$\therefore J_{\pm} |k, j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |k, j, m \pm 1\rangle$$

Para esta base:

$$\langle k', j', m' | k, j, m \rangle = \delta_{kk'} \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

$$\sum_j \sum_{m=-j}^j \sum_{k=k_{\min}(j)}^{k_{\max}(j)} |k, j, m\rangle \langle k, j, m| = \mathbb{1}$$

- Representación matricial de $J^2, J_z, J_+, J_-, J_x, J_y, J_z$

$$\langle k', j', m' | J^2 | k, j, m \rangle = \hbar^2 j(j+1) \delta_{kk'} \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

mismo valor sin importar k y m

$$\langle k', j', m' | J_z | k, j, m \rangle = \hbar m \delta_{kk'} \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

no depende de k pero si de j (indirectamente)

$$\langle k', j', m' | J_+ | k, j, m \rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \delta_{kk'} \delta_{jj'} \delta_{m', m+1}$$

$$\langle k', j', m' | J_- | k, j, m \rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \delta_{kk'} \delta_{jj'} \delta_{m', m-1}$$

$$J_+ = J_x + iJ_y \quad J_- = J_x - iJ_y \Rightarrow$$

$$J_x = \frac{J_+ + J_-}{2} \quad J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i}$$

Ojo: J_+, J_-, J_x, J_y no son diagonales

Ejemplos.

Como $\hbar$ no afecta la estructura matricial lo ignoraremos.

(i.e. usaremos la base $|j, m\rangle$)

i) $j=0 \rightarrow m=0 \rightarrow \text{Base: } \{|j=0, m=0\rangle$

Espacio unidimensional.

ii) $j=\frac{1}{2} \rightarrow m=-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rightarrow \text{Base: } \beta = \{|j=\frac{1}{2}, m=+\frac{1}{2}\rangle, |j=\frac{1}{2}, m=-\frac{1}{2}\rangle\}$

$$[J_z]_{\beta} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(J_+) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(J_-) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$(J^2) = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e-vectors of $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad \frac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

e-values $+1$ -1

Discutir Stern-Gerlach.

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

Matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.2. Experimento de Stern-Gerlach

Referencia Sakurai 1.1

Un experimento seminal de la Mecánica Cuántica fue el realizado por Otto Stern y Walther Gerlach en 1922. En éste un haz de átomos de plata pasa por un campo magnético inhomogéneo.

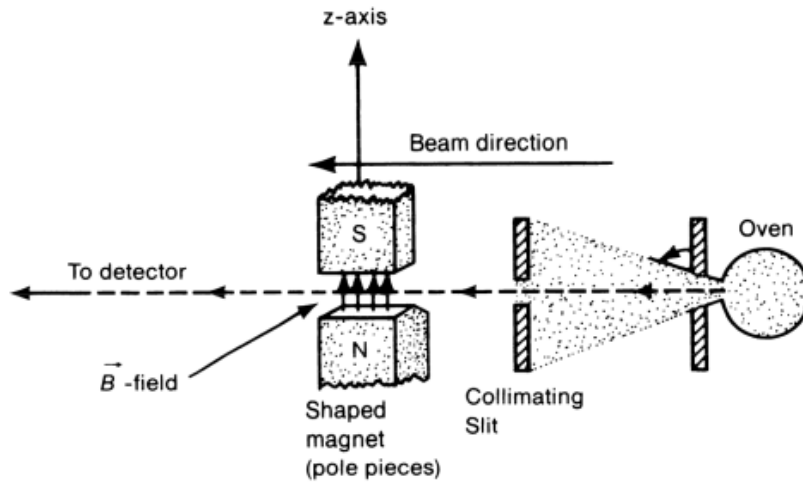


FIGURE 1.1. The Stern-Gerlach experiment.

Silver in the periodic table	
	Cu ↑ Ag ↓ Au
palladium ← silver → cadmium	
Atomic number (Z)	47
Group	group 11
Period	period 5
Block	d-block
Electron configuration	[Kr] 4d ¹⁰ 5s ¹
Electrons per shell	2, 8, 18, 18, 1

La energía de interacción entre un momento magnético μ y un campo magnético $\mathbf{B}$ es

$$-\mu \cdot \mathbf{B}$$

Decir que $\vec{\mu} \sim \vec{S}$

por lo que la fuerza en la dirección Z es

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z} (\mu \cdot \mathbf{B}) = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

si $\frac{\partial B_z}{\partial z} > 0$, un átomo con $\mu_z > 0$ será sometido a una fuerza positiva mientras que si $\mu_z < 0$, $F_z < 0$. De este modo el aparato de SG mide la componente Z del momento magnético del átomo que lo atraviesa.

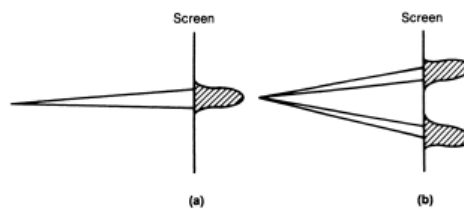


FIGURE 1.2. Beams from the SG apparatus; (a) is expected from classical physics, while (b) is actually observed.

Los átomos del horno son aleatorios así que clásicamente esperamos (a) pero obtenemos (b).

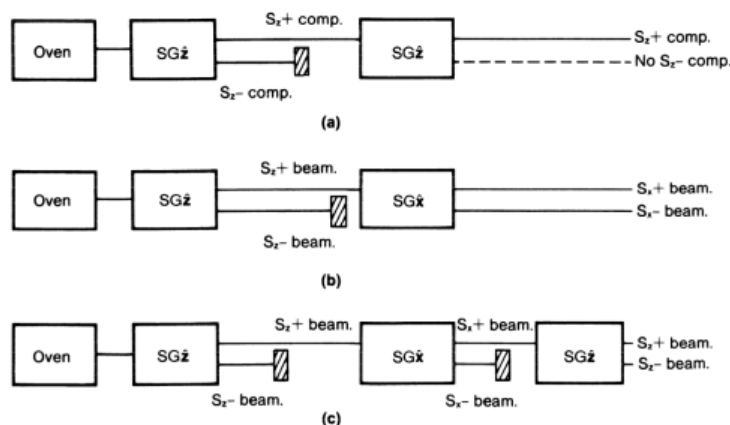


FIGURE 1.3. Sequential Stern-Gerlach experiments